Απειροστικός Λογισμός ΙΙ 15/04/2019

$G:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ αντιπαράγωγος της $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής
Τότε $\int_\alpha^b G'(x)dx = G(b)-G(\alpha)$

<u>Ερώτημα</u>: Έστω $G:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ παραγ. $\xrightarrow{?}$ $\int_\alpha^b G'(x) = G(b)$
Όχι!

<u>Παράδειγμα</u> 1

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} & x\in(0,1] \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

Για $x\neq 0$ $G'(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$

$G'(0) = \lim_{x\to 0^+} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$

μη φραγμένη άρα όχι ολοκλ.

2 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{x}\right)'dx = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{-1}\right) = -2$

$\vee\!|$
0

<u>Λάθος</u>, επειδή η $\frac{1}{x^2}$ δεν είναι ολοκλ. στο $[0,1]$

<u>2ο ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ</u>

Έστω $G:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ παραγ. και $G':[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκλ. τότε $\int_\alpha^b G'(x)dx = G(b)-G(\alpha)$

Αν $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0\in[\alpha,b]$ τότε $\left(\int_\alpha^x F(t)dt\right)'_{x=x_0}=F(x_0)$

Απόδειξη: Έστω $P=a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ τυχαία διαμέριση

του $[\alpha,b]$ $U(G',P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sup_{[x_{i-1},x_i]}G'$

$L(G',P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\inf_{[x_{i-1},x_i]}G'$

Για $i=1,2,\ldots,n$ $\exists\, \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ τ.ω $G'(\xi_i)(x_{i-1},x_i)$

ΘΜΤ Ισχύει: $\inf_{[x_{i-1},x_i]}G'\leq G'(\xi_i)\leq\sup_{[x_{i-1},x_i]}G'$

$\Rightarrow U(G',P)\geq\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})G'(\xi_i)=$

$\sum_{i=1}^{n}[G(x_i)-G(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}[G(x_i)-G(x_{i-1})]$

$=(G(x_1)-G(x_0))+(G(x_2)-G(x_1))+\ldots+(G(x_{n-1})-G(x_{n-2}))$

$+(G(x_n)-G(x_{n-1}))$

$=G(x_n)-G(x_0)=G(b)-G(\alpha)\Rightarrow$

$U(G',P)\geq G(b)-G(\alpha)$

$\boxed{L(G',P)\leq G(b)-G(\alpha)}$ $\forall$ διαμέριση P του $[\alpha,b]$

$\int_a^b G'=\inf_P U(G',P)\geq G(b)-G(\alpha)$

$\int_\alpha^b G'=\sup_P L(G',P)\leq G(b)-G(\alpha)$

$$G(b)-G(\alpha) \geq \int_\alpha^b \epsilon' = \int_\alpha^b G'(x)\,dx = \Big|_\alpha^b G' \geq G(b)-G(\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\alpha^b G'(x)\,dx = G(b)-G(\alpha)}$$

~~F: [α, b] →~~

ΑΣΚΗΣΗ 9 Φυλλάδιο 3

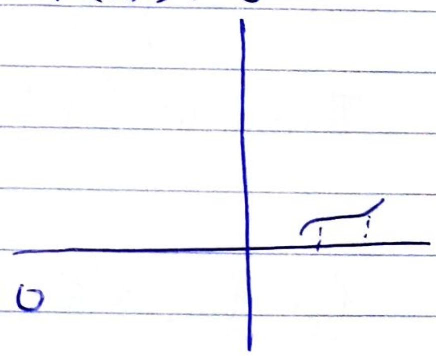
$F:[\alpha,b]\to \mathbb{R}_+$ συνεχής, $\int_\alpha^b F(t)\,dt = 0$

Ν.δ.ο. $F(x)=0 \quad \forall x\in[\alpha,b]$

Λύση: Έστω ότι $\exists x_0\in[\alpha,b]$ τ.ω. $F(x_0)\neq 0 \Rightarrow F(x_0) > l > 0$

Επειδή F συνεχής στο x_0, $\exists \delta>0$ τ.ω. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap[\alpha,b]$ να ισχύει $F(x)>l \Rightarrow \forall x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]\cap[\alpha,b]$ ισχύει $F(x)\geq l>0$

$$\Rightarrow 0 = \int_\alpha^b F(x)\,dx = \int_\alpha^{x_0-\delta} F(x)\,dx + \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} F(x)\,dx}_{\geq\, l\cdot 2\delta} + \underbrace{\int_{x_0+\delta}^{b} F(x)\,dx}_{\geq\, 0} \geq l > 0$$



Άτοπο άρα $F(x)=0 \quad \forall x\in[\alpha,b]$

Συμβολισμός $[F(x)]_\alpha^b$ $[F(x)]_\alpha^b = F(b)-F(\alpha)$

Αν $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ $\int F(x)\,dx = \int_\alpha^x F(t)\,dt + \underbrace{c}_{\text{αυθαίρετη σταθερά}}$

- Το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της F

Ολοκλήρωση κατά μέρη

Έστω οι $F, g : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ παραγ. τ.ω οι F', g' να είναι ολοκληρώσιμες. Τότε:

$$\int_\alpha^b (Fg')(t)\,dt = [(Fg)(t)]_\alpha^b - \int_\alpha^b (F'g)(t)\,dt$$

Απόδειξη: F παραγ. άρα συνεχής άρα ολοκληρ. στο $[\alpha, b]$. Επίσης g' ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$ από υπόθεση $\Rightarrow Fg'$ ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, b]$
Ομοίως $F'g$ ολοκλ. στο $[\alpha, b]$

$$\int_\alpha^x (Fg' + F'g)(t)\,dt = \int_\alpha^x (Fg)'(t)\,dt \xrightarrow{2^o \; \Theta.\Theta.A}$$

$$[(Fg)(t)]_\alpha^x \Rightarrow \int_\alpha^x (Fg')(t)\,dt = [(Fg)(t)]_\alpha^x - \int_\alpha^x (F'g)(t)\,dt$$

Πόρισμα $\int (Fg')(t)\,dt = (Fg)(t) - \int (F'g)(t)\,dt$

Παράδειγμα $\int_1^e \underset{\overset{\vee\mid}{0}}{\ln x}\,dx = \int_1^e (x)'\ln x\,dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x(\ln x)'\,dx$

~~Πόρισμα~~

$= e - 0 - \int_1^e x \frac{1}{x}\,dx = e - \int_1^e 1\,dx$

$= e - (e-1) = \boxed{1}$

2) $\int_0^1 x \cdot e^{2x}\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx = \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (x)'\frac{e^{2x}}{2}\,dx$

$= \frac{e^2}{2} - 0 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2 - e^0}{2}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$\boxed{\frac{e^2+1}{4}}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} x(-\cos x)'\,dx = [x(-\cos x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (x)'(-\cos x)\,dx$$

$$= 0 - 0 + \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)'\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \boxed{1}$$

(4) $\int_0^1 \sin x\, e^x\,dx = \int_0^1 \sin x (e^x)'\,dx = \sin x e^x - \int_0^1 (\sin x)' e^x\,dx$

$= \sin x e^x - \int_0^1 \cos x\,(e^x)'\,dx =$

$= \sin x e^x - \int_0^1 \cos x\,(e^x)'\,dx = \sin x \cdot e^x - \int \cos x (e^x)'\,dx =$

$\sin x \cdot e^x - (\cos x e^x - \int_0^1 (\cos x)' e\,dx$

$= (\sin x - \cos x)e^x + \int_0^1 (-\sin x)e^x\,dx$

$\Rightarrow 2\int_0^1 \sin x e^x\,dx = (\sin x - \cos x)e^x \Rightarrow$

$\int_0^1 \sin x e^x\,dx = \frac{\sin x - \cos x}{2} - e^x + c$

<u>Ap d</u> $\int_0^1 \sin x e^x\,dx = \int_0^1 \left(\frac{\sin x - \cos x}{2} e^x\right)'\,dx =$

$\frac{\sin 1 - \cos 1}{2} e - \frac{\sin 0 - \cos 0}{2} \cdot e^0$

ΘΕΩΡΗΜΑ: [2ο ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ]

Εστω $F:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $g:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ μονότονη με συνεχή παράγωγο. Τοτε, $\exists\ \xi\in[\alpha,b]$ τω $\int_\alpha^b F(x)g(x)dx =$

$$g(\alpha)\int_\alpha^\xi F(x)dx + g(b)\int_\xi^b F(x)dx$$

Αποδειξη: Ειτε $g'(x)\geq 0\ \forall x\in[\alpha,b]$ ειτε $g'(x)\leq 0\ \forall x\in[\alpha,b]$

Χωρίς βλαβη της γενικοτητας $g'(x)\geq 0$

1ο ΘΜΤ ολοκληρωτικού ~~λογισμού~~ Αν $h,\omega:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες h συνεχής

ω διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha,b]$

τοτε $\exists\ \xi\in[\alpha,b]$ τω $\int_\alpha^b h(x)\omega(x)dx = h(\xi)\int_\alpha^b \omega(x)dx$

Αν $F(x)=\int_\alpha^x F(t)dt$, τοτε $F=F'$ (επειδή F συνεχής)

$$\int_\alpha^b F(x)g(x)dx = \int_\alpha^b F'(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_\alpha^b - \int_\alpha^b F(x)g'(x)dx \overset{F(\alpha)=0}{=} F(b)g(b) - \int_\alpha^b F(x)g'(x)dx$$

Απο 1ο ΘΜΤ $(F=h,\ g'=\omega)\ \exists\ \xi\in[\alpha,b]$

$$\int_\alpha^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_\alpha^b g'(x)dx = F(\xi)(g(b)-g(\alpha))$$

Αρα $\int_\alpha^b F(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(\xi)(g(b)-g(\alpha))$
$= (F(b)-F(\xi))g(b)+F(\xi)g(\alpha)$

$$= \int_{\xi}^{b} F(t)\,dtg(b) + \int_{\alpha}^{\xi} F(t)\,dtg(\alpha)$$

Ασκηση 2 φυλλάδιο 3

Να βρείτε $F : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ τ.ω η $|F|$ να είναι ολοκληρ. αλλά η F να μην είναι

Λυση: Αν $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$ Τοτε g όχι ολοκληρ.

Θετω $F(x) = g(x) - 1/2$ Τοτε F όχι ολοκληρ. αλλιως

$g = F + 1/2$ ολοκληρ., Ατοπο

$$F(x) = \begin{cases} 1/2 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -1/2 & x \in \mathbb{R} / \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$ Ομως $|F(x)| = 1/2$ ολοκληρ. στο $[0,1]$

Ασκηση 5 Φυλλαδιο 3 $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρ. και $F(x) = 0 \ \forall x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ Νδο $\int_0^1 F(x)\,dx = 0$

Λυση: Εστω $P = \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ τυχουσα διαμεριση του $[\alpha, b]$ $L(F,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} F(x)$

Στο $[x_{i-1}, x_i]$ υπαρχει $\xi \in \mathbb{Q} \Rightarrow F(\xi) = 0 \Rightarrow$

$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} F(x) \leq F(\xi) = 0 \Rightarrow L(F,P) \leq 0$

$$U(F,P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sup_{[x_{i-1},x_i]}F(x)$$

Όμοια με πριν $\sup_{[x_{i-1},x_i]} F(x)\geq 0$

Γνωρίζουμε $L(F,P)\leq\int_\alpha^b F(t)\,dt\leq U(F,P)$

$$\int_\alpha^b F(t)\,dt=\int_\alpha^b F=\inf_P U(F,P)\geq 0$$

$$\int_\alpha^b F(t)\,dt=\int_a^b F=\sup_P L(F,P)\leq 0$$

$$\to\int_\alpha^b F(t)\,dt=0$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 11 φυλλάδιο 3</u> Αν $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής

να βρεθεί το $\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x F(t)\,dt}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'_+(0)=F(0)$$

$F(x)=\int^x F(t)\,dt$

$F(0)\overset{?}{=}0$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 10 φυλλάδιο 3</u>

Έστω $F,g:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες τότε:

$$\int_\alpha^b F(x)g(x)\,dx\leq\left[\int_\alpha^b F^2(x)\,dx\cdot\int_\alpha^b g^2(x)\,dx\right]^{1/2}$$

Cauchy-Schwarz

Λύση $F\cdot g$, F^2, g^2 ολοκλ. επειδή F, g ολοκληρ.

Για $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \int_a^b (F+\lambda g)^2(x)dx$

$$= \int_a^b F^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b F(x)g(x)\,dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ τριώνυμο ως προς λ

Επειδή το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο

ισχύει $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \left[2\int_a^b F(x)g(x)dx\right]^2 - 4\int_a^b F^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$

$$\Leftrightarrow 4\left[\left(\int_a^b F(x)g(x)dx\right)^2 - \int_a^b F^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx\right] \leq 0$$